

Bolesławiecki Konkurs Matematyczny dla klas I – II liceum i technikum 2022

Klasy I

Zadanie 1. Uzasadnij, że liczba $5 \cdot (5^{16} - 1)$ jest podzielna przez każdą liczbę naturalną a , $0 < a \leq 6$.

Zadanie 2. Z trzech liczb druga jest większa od pierwszej o tyle samo, o ile trzecia jest większa od drugiej. Wiadomo również, że iloczyn dwóch mniejszych liczb wynosi 85, a iloczyn dwóch większych 115. Znajdź te liczby.

Zadanie 3. Oblicz wartość wyrażenia $x^3 + \frac{1}{x^3}$ wiedząc, że $x + \frac{1}{x} = 5$, $x \neq 0$.

Zadanie 4. W trójkącie ABC wysokość CD ma długość 4. Punkt D dzieli podstawę AB o długości 9, w stosunku 1:8. Znajdź długość odcinka równoległego do wysokości CD tego trójkąta, dzielącego trójkąt ABC na dwie figury o równych polach.

Zadanie 5. Oblicz pole powierzchni i objętość prostopadłościanu, wiedząc, że jeśli byśmy zwiększyli o 1 cm:

- jedynie długość, to objętość wzrosłaby o 20 cm^3 ,
- jedynie jego szerokość, to objętość wzrosłaby o 50 cm^3 ,
- jedynie jego wysokość, to objętość wzrosłaby o 10^3 .

Klasy II

Zadanie 1. Znajdź dwucyfrową liczbę naturalną, która jest sumą sześcienu swojej cyfry dziesiątek i kwadratu swojej cyfry jedności.

Zadanie 2. Pięć lat temu Adam był dwa razy starszy od Beaty. Obecnie ma on trzy razy tyle lat, ile miała Beata wtedy, gdy on miał tyle, ile Beata teraz. Ile lat ma Adam i Beata?

Zadanie 3. Napisz równanie kwadratowe o współczynnikach całkowitych, którego rozwiązaniami są liczby $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$ oraz $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.

Zadanie 4. Prostokąt ABCD, w którym $AB=3AD$ podzielono na trzy kwadraty AEFD, EGHF oraz GBCH. Wykaż, że $\sphericalangle AED + \sphericalangle AGD + \sphericalangle ABD = 90^\circ$.

Zadanie 5. Do pudła w kształcie sześcienu o krawędzi 1 m włożono kulę o promieniu 50 cm. W ośmiu „rogach” pozostała przestrzeń. O jakim maksymalnym promieniu można jeszcze włożyć w tych „rogach” kule.

ETAP POWIATOWY

Zadanie 1. Gdyby Wojciech miał obecnie dwa lata więcej, jego wiek stanowiłby 75% obecnego wieku Joanny. Za 12 lat wiek Wojciecha będzie stanowił 44% sumy lat ich obojga.

Jakim procentem obecnego wieku Joanny jest obecny wiek Wojciecha?

Zadanie 2. Wykaż, że zachodzi równość

$$\sqrt{\log_{3\sqrt{3}}(9\sqrt[3]{9})} - \sqrt{\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}}} = \sqrt{\log_{(\sqrt{5}+2)} \frac{1}{\sqrt{5}-2}}$$

Zadanie 3. Rozwiąż równanie $[(x-5)(x+5) + (y-5)(y+5)]^2 + (xy+7)^2 = 0$.

Zadanie 4.

Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$, gdy
$$\begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2+\sqrt{5}}{3} \\ \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2-\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Zadanie 5. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano punkt D taki, że $|\sphericalangle BAD| = 5^\circ$, a na boku CA obrano punkt E taki, że $|\sphericalangle CBE| = 15^\circ$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie F . Oblicz miary kątów trójkąta AEF .

